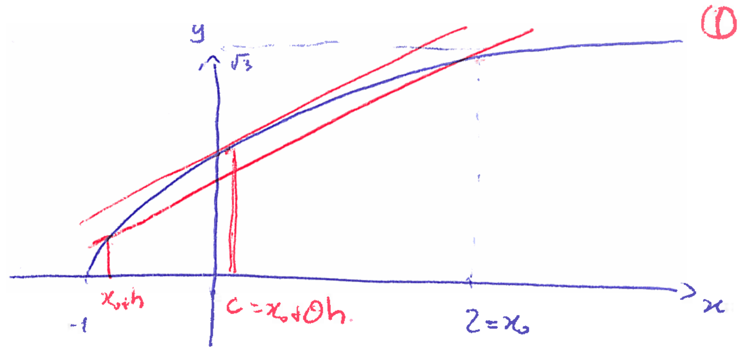
TD 9 - Exo 14.

$f(x) = \sqrt{1+x}$, $x_0 = 2$



a) le domaine de f est

$D_f = [-1 ; +\infty[$

f est continue sur $[-1 ; +\infty[$, et dérivable sur $]-1 ; +\infty[$,

avec $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{1+x}}$

Par le théorème des accroissements finis (appliqué à l'intervalle fermé entre x_0 et $x_0+h \in D_f$), on a que $\exists\ \theta = \theta(h) \in]0,1[$ t.q.

$$f(x_0+h) - f(x_0) = h\, f'(x_0+\theta h) \qquad (*)$$

On va montrer que un tel θ est unique.

- D'abord, on montre que f' est strictement décroissante :

$$f''(x) = \frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\cdot(1+x)^{-\frac{3}{2}} = -\frac{1}{4\sqrt{(1+x)^3}} < 0 \quad \forall x \in D_f \setminus \{-1\}.$$

Donc f' est strictement décroissante sur $]-1 ; +\infty[$.

Supposons par absurde qu'il existe $\theta_1 \neq \theta_2$ satisfaisant $(*)$ pour un certain h fixé.

Alors $f'(x_0+\theta_1 h) = \dfrac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} = f'(x_0+\theta_2 h)$, en contradiction avec le fait que f' est strictement décroissante sur $]-1 ; +\infty[$ (et donc injective).

(b) Calculons le $\theta(h)$ du point précédent. $\theta(h)$ satisfait $(*)$:

$$\sqrt{3+h}-\sqrt{3} = h\cdot\frac{1}{2\sqrt{3+\theta h}} \to \sqrt{3+\theta h} = \frac{h}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3+h}-\sqrt{3}}.$$

$$\to 3+\theta h = \frac{h^2}{4}\;\frac{1}{3+h+3-2\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{3+h}} \to \theta = \left[\frac{h^2}{4\left(6+h-6\sqrt{1+\frac{h}{3}}\right)}-3\right]\cdot\frac{1}{h}.$$

On veut calculer $\lim\limits_{h\to 0}\theta(h) = \lim\limits_{h\to 0}\frac{1}{h}\left[\frac{h^2}{4\left(6+h-6\sqrt{1+\frac{h}{3}}\right)}-3\right].$

On procède au calcul du DL de $\sqrt{1+\frac{h}{3}}$ ..

Lemme : Le DL de $(1+x)^{\alpha}$ $(\alpha\in\mathbb{R})$ pour $x\to 0$ à l'ordre n est donné par :

$$(1+x)^{\alpha} = 1+\binom{\alpha}{1}x+\binom{\alpha}{2}x^2+\dots+\binom{\alpha}{n}x^n+o(x^n)$$

où $$\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-k+1)}{k!}$$

Preuve (lemme) Soit $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. Alors $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, et

$f^{(k)}(x) = \alpha\cdot(\alpha-1)\cdot\ldots\cdot(\alpha-k+1)\,(1+x)^{\alpha-1}.$

La formule dérive alors du théorème de Taylor. $f(x)=\sum\limits_{k=0}^{n} f^{(k)}(x_0)\cdot\frac{(x-x_0)^k}{k!}+o((x-x_0)^n)$ $\square$

Dans notre cas, $\alpha=\frac{1}{2}$ $\to$ $\binom{\alpha}{1}=\frac{1}{2}$ $\quad\binom{\alpha}{2}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)}{2}=-\frac{1}{8}$

$$\binom{\alpha}{3}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)}{3!}=\frac{1}{16}.$$

Donc le DL à l'ordre 3 de $\sqrt{1+x}$ est.

$$\sqrt{1+x} = 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{16}x^3 + o(x^3).$$

Pour $\sqrt{1+\frac{h}{3}}$ il suffit remplacer x par $\frac{h}{3}$!

$$\sqrt{1+\frac{h}{3}} = 1 + \frac{h}{6} - \frac{h^2}{72} + \frac{h^3}{16\cdot 27} + o(h^3).$$

Il s'en suit que :

$$\lim_{h\to 0} \theta(h) = \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left[\frac{h^2}{4\cdot\left(6+h-6\left(1+\frac{h}{6}+\frac{h^2}{72}+\frac{h^3}{16\cdot 27}+o(h^3)\right)\right)} - 3\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left[\frac{h^2}{4\left(\cancel{6}+\cancel{h}-\cancel{6}-\cancel{h}+\frac{h^2}{12}-\frac{h^3}{72}+o(h^3)\right)} - 3\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{1}{h^2}\left[\frac{\cancel{h^2}}{\cancel{h^2}\left(\frac{1}{3}-\frac{h}{18}+o(h)\right)} - 3\right] = \lim_{h\to 0}\frac{1}{h^2}\left[\frac{3}{1-\frac{h}{6}+o(h)} - 3\right]$$

$$= \lim_{h\to 0} \frac{3}{h^2}\left[\frac{\cancel{1}-\cancel{1}+\frac{h}{6}+o(h)}{1-\frac{h}{6}+o(h)}\right] = \lim_{h\to 0} \frac{\cancel{3}}{\cancel{h^2}}\cdot\frac{h}{\cancel{6}\,2}\left(1+o(1)\right) = \frac{1}{2}$$

Rmq : Erreur dans le texte de l'exercice, calculer $\lim_{h\to 0} \theta(h)$.